

Übungsblatt 8 (Homotopietheorie 1, WS 2019/20)

Achim Krause, Thomas Nikolaus

zur Abgabe und Besprechung in der Übungsgruppe am 04.12.

Aufgabe 1. Sei X ein Raum. Beweisen Sie die Existenz eines CW-Komplexes K mit schwacher Äquivalenz $K \rightarrow X$ ohne Benutzung simplizialer Mengen.

Aufgabe 2. Sei M eine kompakte, zusammenhängende, orientierbare 3-Mannigfaltigkeit M , mit Fundamentalgruppe $\pi_1(M) = A_5$.¹
Zeigen Sie: Für eine solche Mannigfaltigkeit M hat $M \setminus \text{pt}$ die Homologie eines Punktes, ist aber nicht zusammenziehbar.

Aufgabe 3. Seien X, Y CW-Komplexe. Wir können drei verschiedene Arten von simplizialen “Abbildungsräumen” formen.

- (1) $\underline{\text{Hom}}(\text{Sing}(X), \text{Sing}(Y))$, wie in Blatt 5, Aufgabe 3, wo n -Simplizes gegeben sind durch Abbildungen $\Delta^n \times \text{Sing}(X) \rightarrow \text{Sing}(Y)$.
- (2) $\text{Map}^\Delta(X, Y)$, wo n -Simplizes gegeben sind durch Abbildungen $|\Delta^n| \times X \rightarrow Y$.
- (3) $\text{Map}^{\Delta, \text{cell}}(X, Y)$, wo n -Simplizes gegeben sind durch *zelluläre* Abbildungen $|\Delta^n| \times X \rightarrow Y$.

Zeigen Sie, dass alle drei Definitionen homotopieäquivalente Kankomplexe liefern.

Aufgabe 4. Zeigen Sie: Die Lokalisierung von sSet an naiven Homotopieäquivalenzen (also Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ für die ein $g : Y \rightarrow X$ und Homotopien $X \times \Delta^1 \rightarrow Y$, $Y \times \Delta^1 \rightarrow X$ zwischen gf und id_X bzw. fg und id_Y existieren) stimmt nicht mit $\text{Ho}(\text{Kan})$ überein.

¹Eine solche Mannigfaltigkeit existiert: Die Poincaré-Sphäre $SU(2)/A_5$ haben wir in Topologie 2 als Beispiel konstruiert.