

Übungsblatt 7 (Homotopietheorie 1, WS 2019/20)

Achim Krause, Thomas Nikolaus

zur Abgabe und Besprechung in der Übungsgruppe am 27.11.

Aufgabe 1. Zeigen Sie: Für jede Gruppe G existiert ein punktierter, zusammenhängender, asphärischer CW-Komplex X mit $\pi_1(X) \cong G$.¹

Aufgabe 2. Betrachten Sie die Kategorie $\mathcal{C}$ mit zwei Objekten a, b und zwei Morphismen $f, g : a \rightarrow b$ (zusätzlich zu den Identitätsmorphismen). Sei $W = \{f, g\}$. Bestimmen Sie $\mathcal{C}[W^{-1}]$ explizit.

Aufgabe 3. Zeigen Sie:

- (a) Es existieren punktierte zusammenhängende CW-Komplexe X, Y und Abbildungen $f, g : X \rightarrow Y$, die nicht homotop sind, aber dieselbe Abbildung auf π_n induzieren, für alle $n \geq 1$.
- (b) $\text{Ho}(\text{Top}_*)$, die Homotopiekategorie von punktierten CW-Komplexen, hat nicht alle Equalizer.

Aufgabe 4.

- (a) Sei X eine simpliziale Menge, und $A \subseteq X$ eine unter-simpliziale Menge, die schwach äquivalent zu Δ^0 ist. Zeigen Sie, dass $X \rightarrow X/A$ eine schwache Äquivalenz ist.²
- (b) Sei X ein Kankomplex mit $\pi_i(X) = 0$ für jedes $i < n$. Zeigen Sie, dass X äquivalent ist zu einem Kankomplex mit nur einem i -Simplex für jedes $i < n$.³ Folgern Sie die entsprechende Aussage für CW-Komplexe.

¹Zusammen mit Blatt 3, Aufgabe 3 folgt, dass Homotopieklassen punktierter, zusammenhängender, asphärischer CW-Komplexe genau durch ihre Fundamentalgruppe klassifiziert werden.

²Tipp: Vergleich mit CW-Komplexen.

³Tipp: Verfahren Sie induktiv.