

Übungsblatt 12 (Homotopietheorie 1, WS 2019/20)

Achim Krause, Thomas Nikolaus

zur Abgabe und Besprechung in der Übungsgruppe am 22.01.

Aufgabe 1. Sei

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & D \end{array}$$

ein Homotopiepullbackdiagramm. Zeigen Sie, dass eine lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow \pi_k(A) \rightarrow \pi_k(B) \times \pi_k(C) \rightarrow \pi_k(D) \rightarrow \pi_{k-1}(A) \rightarrow \dots$$

existiert.

Aufgabe 2. Eine simpliziale Menge X heißt *k-coskeletal* wenn für jede simpliziale Menge Z die natürliche Abbildung

$$\mathrm{Hom}(Z, X) \rightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{sk}_k Z, X)$$

bijektiv ist. Zeigen Sie: Für jedes X existiert eine k -coskeletale simpliziale Menge $\mathrm{cosk}_k X$ zusammen mit einer Abbildung $X \rightarrow \mathrm{cosk}_k X$, die initial unter allen solchen ist. Beweisen Sie, dass für einen Kan-Komplex X die simpliziale Menge $\mathrm{cosk}_k X$ ebenfalls Kan ist, und eine funktorielle Wahl von $\tau_{\leq k} X$ ist.

Aufgabe 3. Berechnen Sie $\pi_k(\mathbb{C}P^n)$ für $k \leq 2n+1$ und beschreiben Sie Erzeuger der nichttrivialen Homotopiegruppen explizit als Abbildungen $S^k \rightarrow \mathbb{C}P^n$. Sie dürfen hierzu die in der Vorlesung erwähnte Aussage, dass hinreichend "gute" Bündel Fasersequenzen sind, benutzen. Insbesondere dürfen Sie voraussetzen, dass für eine topologische Gruppe G und eine freie G -Wirkung auf einem Raum X üblicherweise $G \rightarrow X \rightarrow X/G$ eine Fasersequenz ist.

Aufgabe 4. In dieser Aufgabe betrachten wir, was am Rand des Bereichs, in dem der Freudenthal-Einhängungssatz gilt, passieren kann.

- (a) Betrachten Sie die Hopfabildung $\eta : S^3 \rightarrow S^2$, die sich explizit beschreiben lässt wie folgt: Wir fassen $S^3 \subseteq \mathbb{C}^2$ auf als Einheitssphäre $\{(z_1, z_2) \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$, S^2 als $\mathbb{C}P^1$, und senden $(z_1, z_2) \mapsto (z_1 : z_2)$ in homogenen Koordinaten. Sei $[d]_n$ Notation für die (bis auf Homotopie eindeutige) Abbildung von Grad d auf S^n . Zeigen Sie:

$$[d]_2 \circ \eta \simeq \eta \circ [d^2]_3.$$

- (b) Zeigen Sie: Für $\alpha : S^{n+k} \rightarrow S^n$ gilt

$$[d]_{n+1} \circ \Sigma \alpha \simeq \Sigma \alpha \circ [d]_{n+k+1}$$

(Tipp: Schreiben Sie ΣS^n als $S^1 \wedge S^n$.)

- (c) Folgern Sie, dass $\Sigma \eta \in \pi_4(S^3)$ Ordnung 2 hat oder trivial ist.¹

¹Tatsächlich sind *alle* Einhängungen $\Sigma^k \eta \in \pi_{k+3}(S^{k+2})$ nichttrivial.