Universität Münster

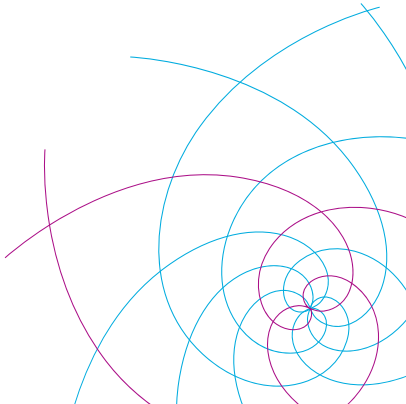
MM Mathematics Münster Cluster of Excellence

Mathe-Geheimnisse entdecken:

Formen und Zahlen

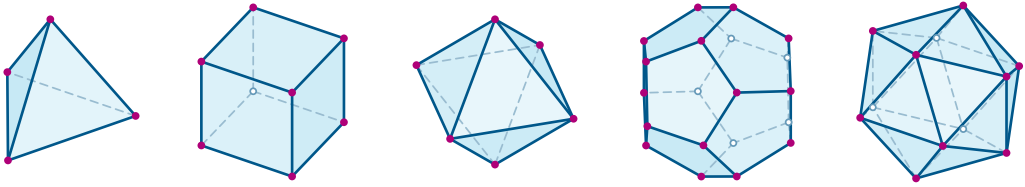
Thomas Nikolaus

Kinder-Uni Münster
6. November 2026

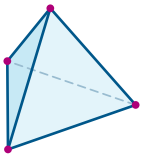


living.knowledge

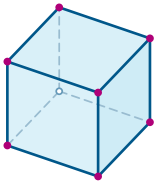
Was haben diese Körper gemeinsam?



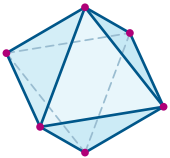
Was haben diese Körper gemeinsam?



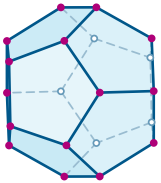
Tetraeder



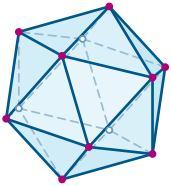
Würfel



Oktaeder

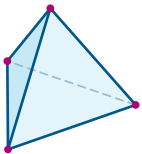


Dodekaeder

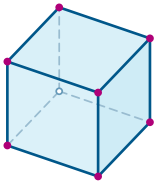


Ikosaeder

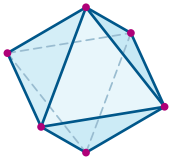
Was haben diese Körper gemeinsam?



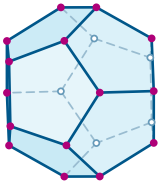
Tetraeder



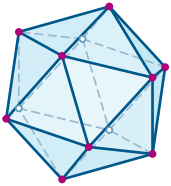
Würfel



Oktaeder



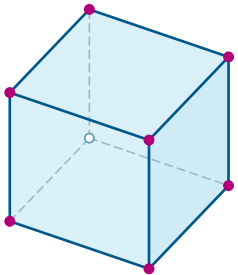
Dodekaeder



Ikosaeder

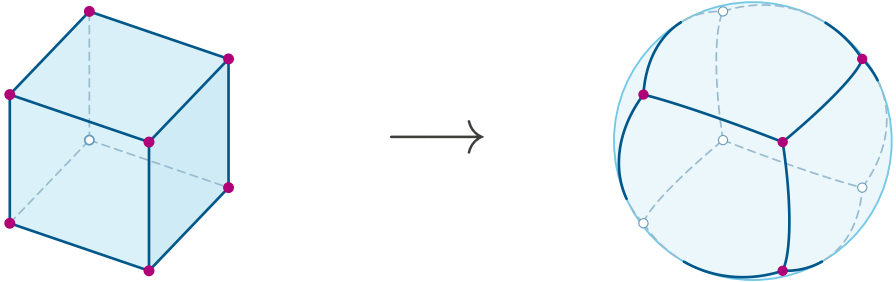
Was ist ähnlich? Was ist verschieden?

Eine dehnbare Gummihaut



Kann die Würfelhaut zu einer Kugel werden?

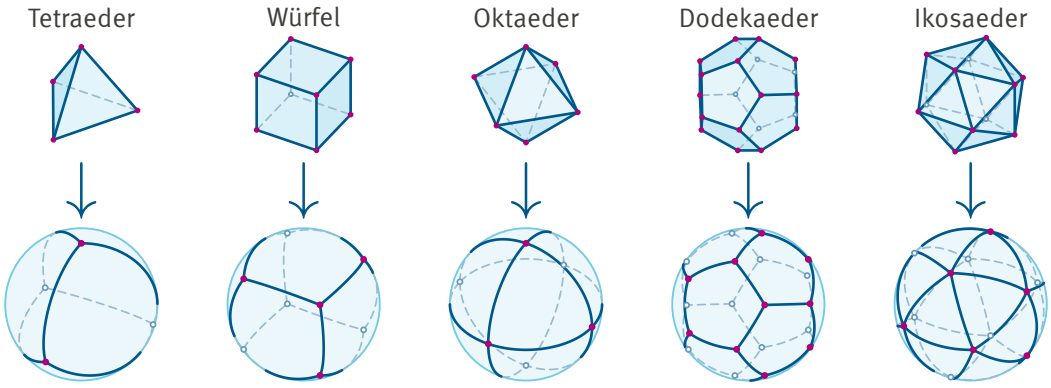
Eine dehnbare Gummihaut



Kann die Würfelhaut zu einer Kugel werden?

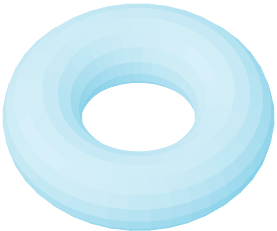
Die markierten Punkte und Linien bleiben auf der Haut.

Die Kugelfamilie

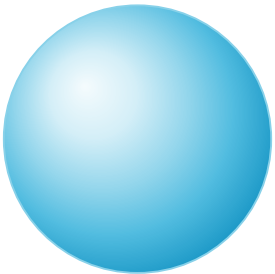


Die Haut wird rund. Die Markierungen bleiben.

Und der Schwimmring?



?

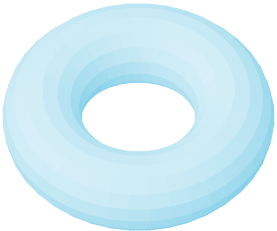


Schwimmring

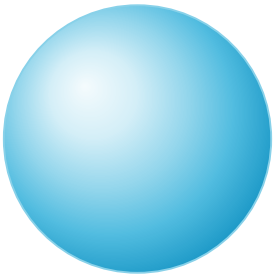
Kugel

Geht das auch ohne Schneiden und Kleben?

Und der Schwimmring?



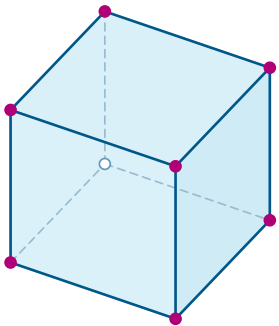




Schwimmring

Kugel

Der durchgehende Tunnel macht einen Unterschied.

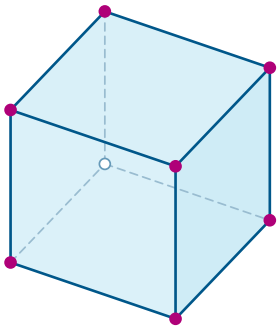


Ecken

Kanten

Flächen

Auch hinten und unten zählt mit!

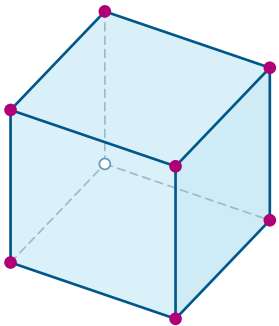


Ecken 8

Kanten

Flächen

Auch hinten und unten zählt mit!

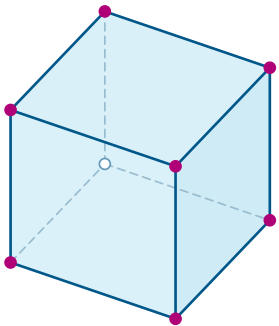


Ecken 8

Kanten 12

Flächen

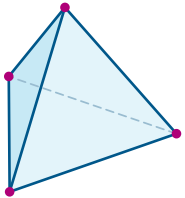
Auch hinten und unten zählt mit!



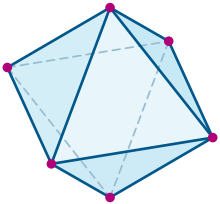
Ecken	8
Kanten	12
Flächen	6

Auch hinten und unten zählt mit!

Jetzt zählt ihr



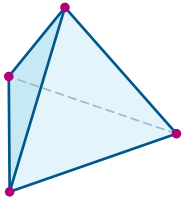
Tetraeder



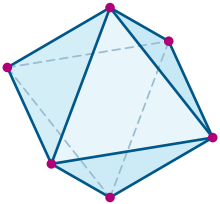
Oktaeder

Immer in dieser Reihenfolge: Ecken, Kanten, Flächen

Jetzt zählt ihr



Tetraeder

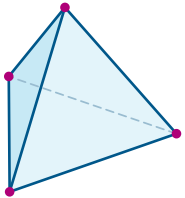


Oktaeder

4 6 4

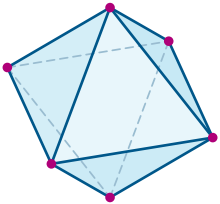
Immer in dieser Reihenfolge: Ecken, Kanten, Flächen

Jetzt zählt ihr



Tetraeder

4 6 4



Oktaeder

6 12 8

Immer in dieser Reihenfolge: Ecken, Kanten, Flächen

Welche Rechnung passt zu allen?

	Ecken	Kanten	Flächen
Tetraeder	4	6	4
Würfel	8	12	6
Oktaeder	6	12	8
Dodekaeder	20	30	12

Findet ihr ein gemeinsames Muster?

Welche Rechnung passt zu allen?

	Ecken	Kanten	Flächen
Tetraeder	4	6	4
Würfel	8	12	6
Oktaeder	6	12	8
Dodekaeder	20	30	12

Tipp: Zählt einmal zwei Spalten zusammen.

Welche Rechnung passt zu allen?

	Ecken	Kanten	Flächen	Ecken + Flächen
Tetraeder	4	6	4	8
Würfel	8	12	6	14
Oktaeder	6	12	8	14
Dodekaeder	20	30	12	32

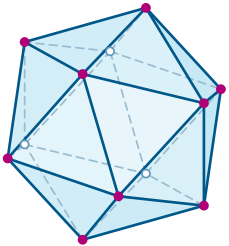
Vergleicht die neue Spalte mit den Kanten.

Welche Rechnung passt zu allen?

	Ecken	Kanten	Flächen	Ecken + Flächen
Tetraeder	4	6	4	8
Würfel	8	12	6	14
Oktaeder	6	12	8	14
Dodekaeder	20	30	12	32

Ecken und Flächen zusammen sind immer zwei mehr!

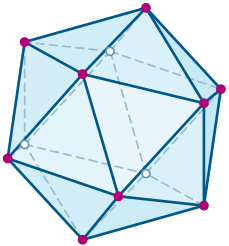
Ecken + Flächen = Kanten + 2



12 Ecken
30 Kanten

Wie viele Flächen?

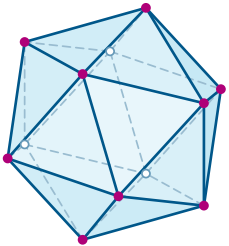
Ecken + Flächen = Kanten + 2



12 Ecken
30 Kanten

20 Flächen

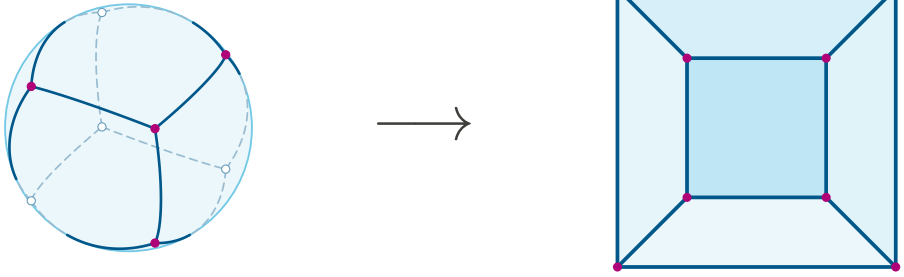
Ecken + Flächen = Kanten + 2



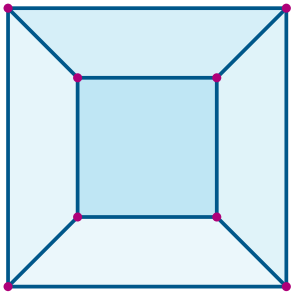
12 Ecken
30 Kanten
20 Flächen

$$\underbrace{E - K + F = 2}_{\text{Eulers Polyederformel}}$$

Die Kugeloberfläche als Landkarte



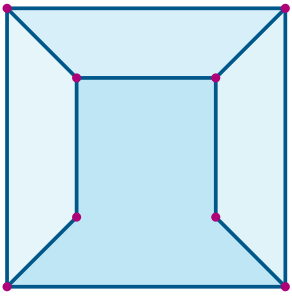
Sechs Gebiete. Das Gebiet außen zählt auch!



Ecken	8
Kanten	12
Gebiete	6

$8 + 6 - 12 = 2$

Was passiert, wenn zwei Gebiete zusammenkommen?

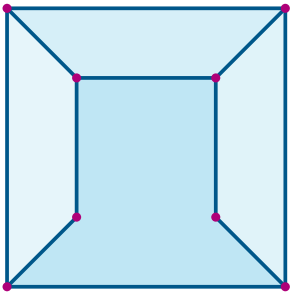


Ecken ?

Kanten ?

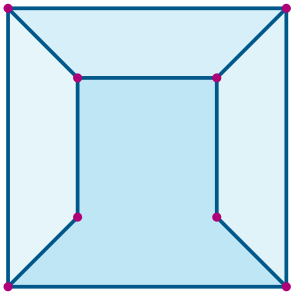
Gebiete ?

Wie viele Ecken sind es jetzt?



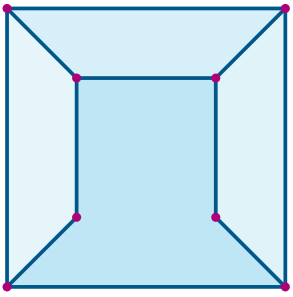
Ecken	8
Kanten	?
Gebiete	?

Wie viele Kanten sind es jetzt?



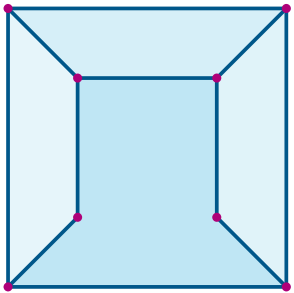
Ecken	8
Kanten	11
Gebiete	?

Wie viele Gebiete sind es jetzt?



Ecken	8
Kanten	11
Gebiete	5

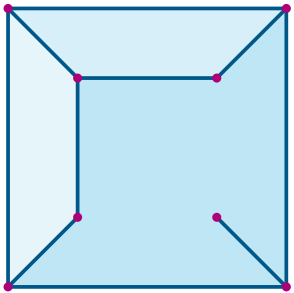
Was ergibt Ecken + Gebiete — Kanten?



Ecken	8
Kanten	11
Gebiete	5

$8 + 5 - 11 = 2$

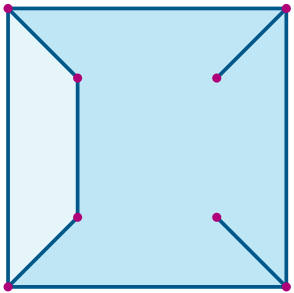
Eine Kante weniger. Ein Gebiet weniger.



Ecken	8
Kanten	10
Gebiete	4

$8 + 4 - 10 = 2$

Eine Kante weniger. Ein Gebiet weniger.



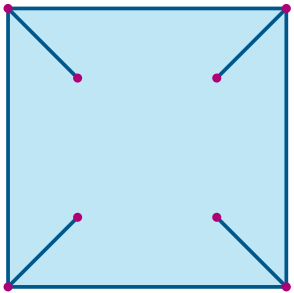
Ecken 8

Kanten 9

Gebiete 3

$8 + 3 - 9 = 2$

Eine Kante weniger. Ein Gebiet weniger.



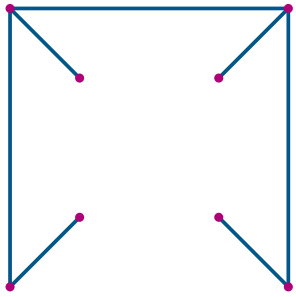
Ecken 8

Kanten 8

Gebiete 2

$8 + 2 - 8 = 2$

Eine Kante weniger. Ein Gebiet weniger.



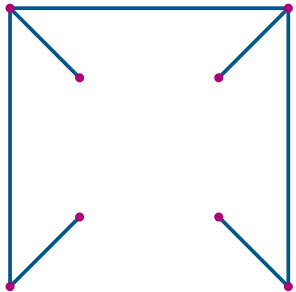
Ecken 8

Kanten 7

Gebiete 1

$8 + 1 - 7 = 2$

Jetzt gibt es nur noch ein Gebiet.



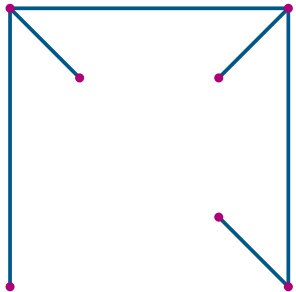
Ecken 8

Kanten 7

Gebiete 1

$8 + 1 - 7 = 2$

Und wenn ein Endpunkt mit seiner Kante verschwindet?

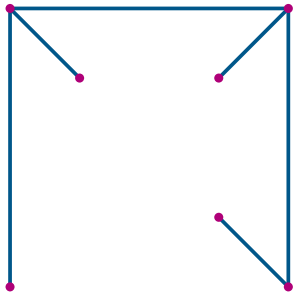


Ecken ?

Kanten ?

Gebiete ?

Wie viele Ecken, Kanten und Gebiete sind es jetzt?



Ecken 7

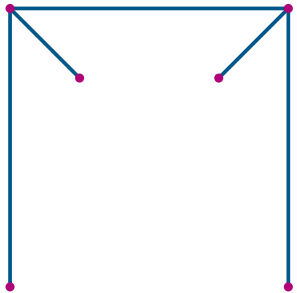
Kanten 6

Gebiete 1

$7 + 1 - 6 = 2$

Eine Ecke weniger. Eine Kante weniger.

Eine Sackgasse verschwindet



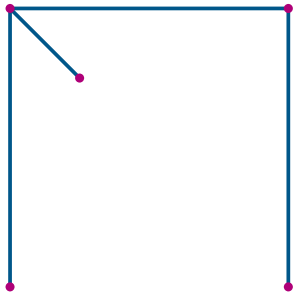
Ecken 6

Kanten 5

Gebiete 1

$6 + 1 - 5 = 2$

Eine Ecke weniger. Eine Kante weniger.



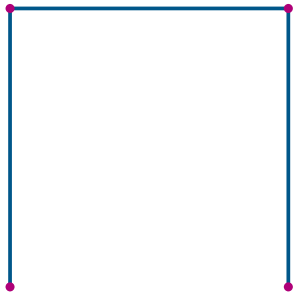
Ecken 5

Kanten 4

Gebiete 1

$5 + 1 - 4 = 2$

Eine Ecke weniger. Eine Kante weniger.



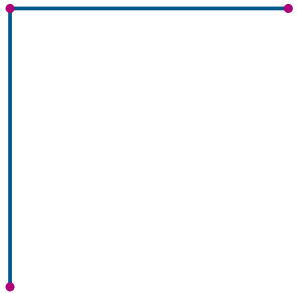
Ecken 4

Kanten 3

Gebiete 1

$4 + 1 - 3 = 2$

Eine Ecke weniger. Eine Kante weniger.



Ecken 3

Kanten 2

Gebiete 1

$3 + 1 - 2 = 2$

Eine Ecke weniger. Eine Kante weniger.



Ecken 2

Kanten 1

Gebiete 1

$2 + 1 - 1 = 2$

Eine Ecke weniger. Eine Kante weniger.

Ecken	1
Kanten	0
Gebiete	1

$$1 + 1 - 0 = 2$$

Ein Punkt. Keine Kante. Ein Gebiet.

$$1 + 1 - 0 = 2$$

Bei jedem Schritt blieb unsere Rechnung gleich.

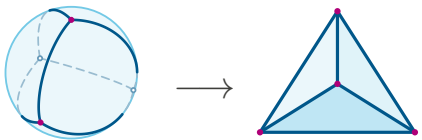
Also war das Ergebnis schon am Anfang 2.

$$1 + 1 - 0 = 2$$

Bei jedem Schritt blieb unsere Rechnung gleich.

Also war das Ergebnis schon am Anfang 2.

Das funktioniert für alle Körper in der Kugelfamilie.



Tetraederhaut Landkarte

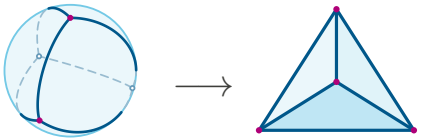
$$1 + 1 - 0 = 2$$

Bei jedem Schritt blieb unsere Rechnung gleich.

Also war das Ergebnis schon am Anfang 2.

Das funktioniert für alle Körper in der Kugelfamilie.

⚠ Beim Schwimmring ist das anders.



Tetraederhaut → Landkarte

Das zweite Geheimnis:

Zahlen



14 Plättchen



Immer 3 zusammen. Wie viele bleiben übrig?

$$14 = 4 \cdot 3 + 2$$



Rest 2

Beim Teilen durch 3 bleibt Rest 2.

14 Plättchen



Immer 5 zusammen. Wie viele bleiben übrig?

$$14 = 2 \cdot 5 + 4$$



Rest 4

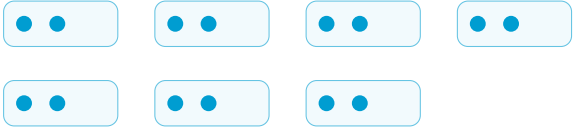
Beim Teilen durch 5 bleibt Rest 4.

14 Plättchen



Immer 2 zusammen. Wie viele bleiben übrig?

$$14 = 7 \cdot 2 + 0$$



Rest 0 bedeutet: Die Zahl ist teilbar.

Welche Zahl steckt im Schloss?

Eine Zahl von 1 bis 30

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30



Jeder Rest verrät uns etwas.

Eine Zahl von 1 bis 30

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30



Schlüssel 3: Rest 2

Welche Zahlen können noch passen?

Eine Zahl von 1 bis 30

1	**2**	3	4	**5**	6
7	**8**	9	10	**11**	12
13	**14**	15	16	**17**	18
19	**20**	21	22	**23**	24
25	**26**	27	28	**29**	30



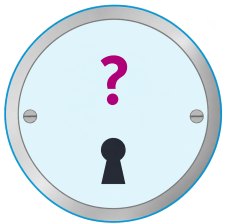
Schlüssel 3: Rest 2

Diese Zahlen passen zum ersten Hinweis.

Welche Zahl steckt im Schloss?

Eine Zahl von 1 bis 30

1	**2**	3	4	**5**	6
7	**8**	9	10	**11**	12
13	**14**	15	16	**17**	18
19	**20**	21	22	**23**	24
25	**26**	27	28	**29**	30



Schlüssel 3: Rest 2

Schlüssel 5: Rest 2

Welche Zahlen erfüllen beide Hinweise?

Welche Zahl steckt im Schloss?

Eine Zahl von 1 bis 30

1	**2**	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	**17**	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30



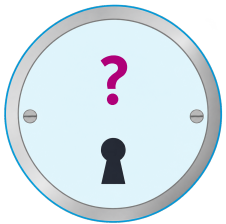
Schlüssel 3: Rest 2

Schlüssel 5: Rest 2

2 oder 17? Welcher Schlüssel hilft jetzt?

Eine Zahl von 1 bis 30

1	**2**	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	**17**	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30



Schlüssel 3: Rest 2

Schlüssel 5: Rest 2

Schlüssel 2: Rest 1

Rest 1 bei Schlüssel 2: Welche Zahl ist es?

Welche Zahl steckt im Schloss?

Eine Zahl von 1 bis 30

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	**17**	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30



Schlüssel 3: Rest 2

Schlüssel 5: Rest 2

Schlüssel 2: Rest 1

Nur noch eine Möglichkeit: **17**

Zwei Schlüssel sind besonders einfach

Zahl	12	15	16
Rest bei 2			
Rest bei 5			

Zwei Schlüssel sind besonders einfach

Zahl	12	15	16
Rest bei 2	0	1	0
Rest bei 5			

Zwei Schlüssel sind besonders einfach

Zahl	12	15	16
Rest bei 2	0	1	0
Rest bei 5	2	0	1

Zwei Schlüssel sind besonders einfach

Zahl	12	15	16
Rest bei 2	0	1	0
Rest bei 5	2	0	1

Für 2 und 5 genügt die letzte Ziffer.

12 345 678

Geht das ohne eine große Division?

12 345 678

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$$

Die Summe der Ziffern heißt Quersumme.

12 345 678

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$$

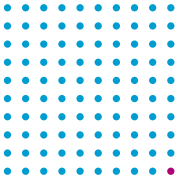
36 ist durch 3 teilbar. Der Schlüssel passt!

Was bleibt von einem Zehner?

Ein Zehner



Ein Hunderter



Wie viele bleiben beim Bilden von Dreierpäckchen übrig?

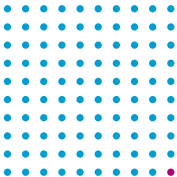
Was bleibt von einem Zehner?

Ein Zehner



$$10 = 9 + 1$$

Ein Hunderter



$$100 = 99 + 1$$

9 und 99 passen ganz in Dreierpäckchen.

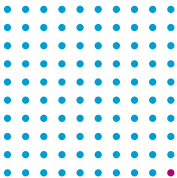
Was bleibt von einem Zehner?

Ein Zehner



$$10 = 9 + 1$$

Ein Hunderter



$$100 = 99 + 1$$

Auch $1000 = 999 + 1$: Wieder bleibt eine Eins.

312

Hunderter	Zehner	Einer
$100 + 100 + 100$	10	$1 + 1$

Wir nehmen nur vollständige Dreierpäckchen weg.

312

Hunderter	Zehner	Einer
$100 + 100 + 100$	10	$1 + 1$
$1 + 1 + 1$	1	$1 + 1$

$$3 + 1 + 2 = 6$$

Sechs einzelne Plättchen sind noch zu prüfen.

312

Hunderter	Zehner	Einer
$100 + 100 + 100$	10	$1 + 1$
$1 + 1 + 1$	1	$1 + 1$

$$3 + 1 + 2 = 6$$

6 passt in Dreierpäckchen. Also auch 312.

313

Welchen Rest lässt 313 beim Teilen durch 3?

313

$$3 + 1 + 3 = 7$$

Welchen Rest lässt 313 beim Teilen durch 3?

313

$$3 + 1 + 3 = 7$$

$$7 = 2 \cdot 3 + 1$$

313 und 7 haben denselben Rest: **1**.

Ein letztes Zahlenschloss

Die geheime Zahl liegt zwischen 150 und 170.

150	151	152	153	154	155	156
157	158	159	160	161	162	163
164	165	166	167	168	169	170



Schlüssel 2: Rest 0

Schlüssel 5: Rest 1

Welche Zahlen erfüllen beide Hinweise?

Die geheime Zahl liegt zwischen 150 und 170.

150	151	152	153	154	155	**156**
157	158	159	160	161	162	163
164	165	**166**	167	168	169	170



Schlüssel 2: Rest 0

Schlüssel 5: Rest 1

156 oder 166? Jetzt hilft die Quersumme.

Die geheime Zahl liegt zwischen 150 und 170.

150	151	152	153	154	155	**156**
157	158	159	160	161	162	163
164	165	**166**	167	168	169	170



Schlüssel 2: Rest 0

Schlüssel 5: Rest 1

Schlüssel 3: Rest 0

Welche Zahl passt zum neuen Hinweis?

Die geheime Zahl liegt zwischen 150 und 170.

150	151	152	153	154	155	**156**
157	158	159	160	161	162	163
164	165	166	167	168	169	170



Schlüssel 2: Rest 0

Schlüssel 5: Rest 1

Schlüssel 3: Rest 0

Die Zahl ist **156**. Ihre Quersumme ist 12.



The Remainders Game

NRICH, Universität Cambridge

Der Computer denkt sich eine Zahl aus.
Wir finden sie mit den Resten!

Online spielen

Welchen Schlüssel würdet ihr zuerst wählen?

https://nrich.maths.org/games/remainders-game

Bei den Formen

$$E + F - K = 2$$

Die Rechnung bleibt
beim Abräumen gleich.

Bei den Zahlen

$$312 \longrightarrow 6$$

Der Rest beim Teilen
durch drei bleibt gleich.

Wir haben Vermutungen geprüft und begründet.

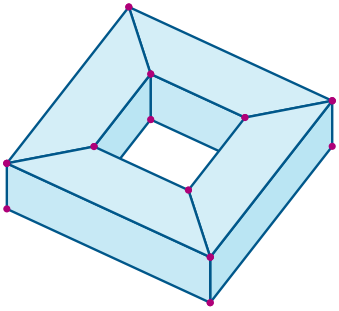
Was möchtet ihr noch wissen?

Danke fürs Mitforschen!

Weitere Geheimnisse

Zum Weiterfragen und Weiterforschen

Ein eckiger Schwimmring



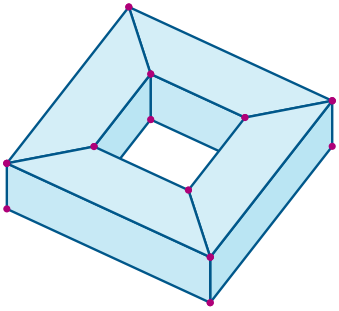
Ecken

Kanten

Flächen

Wie viele Ecken hat der Körper?

Ein eckiger Schwimmring



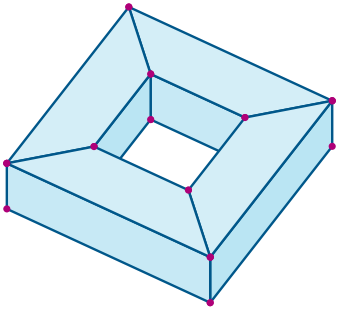
Ecken 16

Kanten

Flächen

Wie viele Kanten zählt ihr?

Ein eckiger Schwimmring



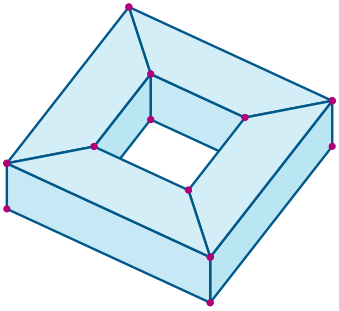
Ecken 16

Kanten 32

Flächen

Und wie viele Flächen sind es?

Ein eckiger Schwimmring

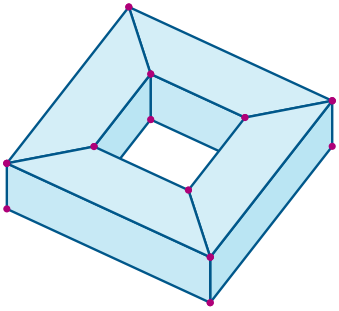


Ecken	16
Kanten	32
Flächen	16

$$16 + 16 - 32 = ?$$

Oben und unten ist der Ring jeweils in vier Vierecke eingeteilt.

Ein eckiger Schwimmring



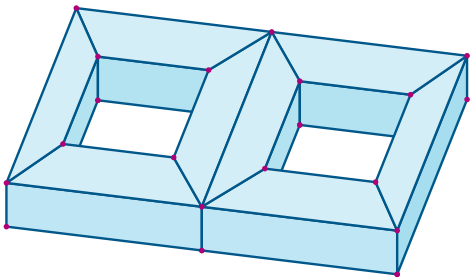
Ecken 16

Kanten 32

Flächen 16

$$16 + 16 - 32 = 0$$

Oben und unten ist der Ring jeweils in vier Vierecke eingeteilt.



Unterseite: dieselbe Unterteilung.

Ecken ?

Kanten ?

Flächen ?

$E + F - K = ?$

Zwei Tunnel: Welche Zahl kommt jetzt heraus?

Alle markierten Punkte zählen als Ecken, auch unten und hinten.

Extra: Bleibt das Ergebnis bei einer anderen Unterteilung gleich?

Und der Schlüssel 9?

$$10 = 9 + 1$$
$$100 = 99 + 1$$
$$1000 = 999 + 1$$

Die weggenommenen Zahlen sind auch durch 9 teilbar.

Und der Schlüssel 9?

$$10 = 9 + 1$$
$$100 = 99 + 1$$
$$1000 = 999 + 1$$

Die weggenommenen Zahlen sind auch durch 9 teilbar.

Deshalb funktioniert die Quersumme auch für 9.

Ziffern abwechselnd addieren und abziehen.
Das heißt **alternierende Quersumme**.

352

$3 - 5 + 2 = ?$

528

$5 - 2 + 8 = ?$

Ziffern abwechselnd addieren und abziehen.
Das heißt **alternierende Quersumme**.

352

$3 - 5 + 2 = 0$

$(3 + 2) - 5 = 0$

528

$5 - 2 + 8 = ?$

Ziffern abwechselnd addieren und abziehen.
Das heißt **alternierende Quersumme**.

352

$3 - 5 + 2 = 0$

$(3 + 2) - 5 = 0$

528

$5 - 2 + 8 = 11$

$(5 + 8) - 2 = 11$

Die Zahl ist durch 11 teilbar, wenn das Ergebnis
$0,\ 11,\ 22, \ldots$ oder $-11,\ -22, \ldots$ ist.

Ziffern abwechselnd addieren und abziehen.
Das heißt **alternierende Quersumme**.

8470

$$8 - 4 + 7 - 0 = ?$$

Die Zahl ist durch 11 teilbar, wenn das Ergebnis
$0,\ 11,\ 22, \ldots$ oder $-11,\ -22, \ldots$ ist.

Ziffern abwechselnd addieren und abziehen.
Das heißt **alternierende Quersumme**.

8470

$$8 - 4 + 7 - 0 = 11$$

$$(8 + 7) - (4 + 0) = 15 - 4 = 11$$

Die Zahl ist durch 11 teilbar, wenn das Ergebnis
$0,\ 11,\ 22, \ldots$ oder $-11,\ -22, \ldots$ ist.

Warum wechseln Plus und Minus?
Wir zerlegen Zehner, Hunderter und Tausender.

$$10 = 11 - 1$$
$$100 = 99 + 1$$
$$1000 = 1001 - 1$$

Ganze Elferpäckchen
ändern die Teilbarkeit nicht.

Übrig bleiben
abwechselnd $+1$ und -1.

Die Zahl ist durch 11 teilbar, wenn das Ergebnis
$0,\ 11,\ 22, \ldots$ oder $-11,\ -22, \ldots$ ist.

Warum wechseln Plus und Minus?
Wir zerlegen Zehner, Hunderter und Tausender.

$$10 = 11 - 1$$
$$100 = 99 + 1$$
$$1000 = 1001 - 1$$

Ganze Elferpäckchen
ändern die Teilbarkeit nicht.

Übrig bleiben
abwechselnd $+1$ und -1.

$$352 = \underbrace{3 \cdot 99 + 5 \cdot 11}_{\text{Vielfaches von 11}} + (3 - 5 + 2)$$

Die Zahl ist durch 11 teilbar, wenn das Ergebnis
$0,\ 11,\ 22, \ldots$ oder $-11,\ -22, \ldots$ ist.